TEORIA ELECTROMAGNETICA
2015 – POSTGRADO

28.

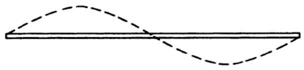
Una antena consiste en un círculo plano de alambre de radio a. La corriente en el alambre es
$I = I_0 \cos wt = \mathrm{Re}\,[I_0\, e^{-iwt}]$

a) Calcule los campos E, H en la zona de radiación sin aproximaciones en ka. Determine la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.

b) ¿Cuál es el momento multipolar más bajo no nulo (Q_{lm} o M_{lm})? Calcule en el límite ka « 1.

29.

Una antena delgada de longitud d es excitada de forma que una corriente sinusoidal de un período la abarca en cada instante, como muestra la figura



a) Calcule exactamente la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y grafique la distribución angular.

b) Determine la potencia total radiada y encuentre un valor numérico para la resistencia de radiación.

c) Trate ahora el problema usando la expansión multipolar:

c1) Calcule los momentos multipolares eléctrico, magnético y cuadrupolar exactamente y en la aproximación de grandes longitudes de onda.

c2) Compare la forma de la distribución angular de potencia radiada de los primeros multipolos no nulos con el resultado exacto.

c3) Determine la potencia total radiada y la resistencia de radiación para los multipolos de menor orden usando los multipolos de c1). Compare con b) e indique si hay alguna contradicción.

30.

El principio de correspondencia de Bohr establece que en el límite de grandes números cuánticos la potencia clásica radiada es igual al producto del cuanto de energía $\hbar\omega$ en la transición dividido por la vida media de la transición de número cuántico n a (n-1).

a. En el caso no relativista muestre que en átomos hidrogenoides la probabilidad de transición (inverso de la vida media) por unidad de tiempo para una transición en una órbita circular de número cuántico principal n a (n-1) está dado clásicamente por la expresión

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{Z e^2}{\hbar c}\right)^4 \frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{n^5}$$

b. Para hidrógeno compare el valor clásico con el valor predecido por la mecánica cuántica para las vidas medias de las transiciones 2p → 1s (1.6×10^{-9} s), 4f → 3d (7.3×10^{-8} s), 6h → 5g (6.1×10^{-7} s).

31.

Considere la fórmula de Fermi, para frecuencias ópticas y para dimensiones atómicas (parámetro a), de forma que $|\lambda a| \approx wa/c << 1$, en el límite ultra relativista.

a. Para un modelo de constante dieléctrica dado por $\epsilon(\omega) \simeq 1 + \frac{4\pi N e^2}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j}$

deduzca que $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} \simeq \frac{2}{\pi}\frac{(ze)^2}{c^2}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty i\omega\left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1\right)\left\{\ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) - \frac{1}{2}\ln[1 - \epsilon(\omega)]\right\} d\omega$

b. Integre la ecuación anterior usando el teorema de Cauchy en el primer cuadrante, asumiendo que los Γ_j son independientes de la frecuencia, para obtener

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2}\ln\left(\frac{1.123c}{a\omega_p}\right) \qquad \text{con} \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m}$$

32.

a. Deduzca la expresión covariante del tensor de campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$.

b. Muestre que la pérdida de energía por revolución en un sincrotrón, expresada en MeV, es $\delta E = 8.85\times10^{-12}\, E^4/R$, donde R se expresa en metros y E en GeV.

c. Deduzca la fórmula de Lienard directamente de $dP(t')/d\Omega$.

d. Use los campos de Lienard-Wiechert para discutir la potencia media radiada por unidad de ángulo sólido en el movimiento no relativista de una partícula de carga q moviéndose:

d1. en el eje z con ley horaria $z(t)=a \cos wt$

d2. en un círculo de radio R del plano x-y con velocidad angular constante w_0.

En cada caso haga un esquema de la distribución angular de la radiación y determine la potencia total radiada en cada caso en un ciclo.

e. Muestre, para un movimiento circular, y a partir de $dP(t')/d\Omega$, que $P(t') = 2/3\; e^2a^2/c^3\;\gamma^4$.

33.

Una partícula de carga e tiene un movimiento armónico simple z(t')= a cos w_0t'

a. Muestre uqe la potencia instantanea radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2 c\beta^4}{4\pi a^2}\frac{\sin^2\theta\cos^2(\omega_0 t')}{(1+\beta\cos\theta\, sen\, w_0 t')^5}$$

b. Calcule el promedio temporal y muestre que es $\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2 c\beta^4}{32\pi a^2}\frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^{7/2}}\sin^2\theta$

34.

Una partícula de carga e se mueve a velocidad constante **β**c para t<0.En un breve intervalo 0 < t < Δt la velocidad no cambia de dirección pero la rapidez decrece a cero linealmente. Para t > Δt la partícula permanece en reposo.

a. Muestre que la radiación emitida por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dE}{d\Omega}=\frac{e^2\beta^2}{16\pi c\Delta t}\frac{(2-\beta\cos\theta)[1+(1-\beta\cos\theta)^2]sen^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4}$$

siendo θ el ángulo polar relativo a la dirección de la velocidad inicial.

b. En el límite γ>>1 muestre que la distribución angular se puede expresar como

$$\frac{dE}{d\xi}\simeq\frac{e^2\beta^2\gamma^4}{c\Delta t}\frac{\xi}{(1+\xi)^4}$$

siendo $\xi = (\gamma\theta)^2$. Muestre que $<\theta^2>^{1/2} \approx 2^{1/2} / \gamma$ y que la expresión de la energía total radiada coincide con lo que se obtiene de la fórmula de Leinard en el mismo límite.

35.

a. En las aproximaciones hechas en clase muestre que para una partícula relativista que se mueve en una trayectoria de radio de curvatura instantáneo ρ, el espectro en frecuencia y ángulo de la radiaciones con helicidades positiva y negativa es

$$\frac{d^2 I_\pm}{d\omega\, d\Omega}=\frac{e^2}{6\pi^2 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2(1/\gamma^2+\theta^2)^2\left|K_{2/3}(\xi)\pm\frac{\theta}{(1/\gamma^2+\theta^2)^{1/2}}K_{1/3}(\xi)\right|^2$$

b. De lo visto en clase y la parte a. discuta la polarización de la radiación totalemitida como función de la frecuencia y ángulo. En particular determine el estado de polarización en 1. altas frecuencias w > w_c para todos los ángulos 2. frecuencias intermedias y bajas para ángulos grandes 3. idem a pequeños ángulos.

36.

Partículas cargadas de cargas e_j y coordenadas $\mathbf{r}_j$(t) son aceleradas en el intervalo de tiempo $-\tau/2<$ t < $\tau/2$ durante el cual sus velocidades cambian de $c\beta_j$ a $c\beta'_j$.

a. Muestre que para frecuencias w τ << 1 la intensidad de la radiación emitida con polarización ϵ por unidad de ángulo sólido y unidad de frecuencia es

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega}=\frac{1}{4\pi^2 c}\left|\vec{\varepsilon}^*\cdot\vec{E}\right|^2 \quad \text{dónde} \quad \vec{E}=\sum_j e_j\left(\frac{\vec{\beta}'_j}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}'_j}-\frac{\vec{\beta}_j}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}_j}\right)e^{-i\omega\vec{n}\cdot\vec{r}(0)/c}$$

b. Un mesón w^0 de masa 784 MeV decae en pares $\pi^+\pi^-$ y e^+e^- con fracciones de decaimiento 1.3×10^{-2} y 8×10^{-5} respectivamente. Muestre que para ambos canales de decaimiento el espectro de frecuencia radiada a bajas energías es

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{e^2}{\pi c}\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right]\simeq\frac{4e^2}{\pi c}\left[\ln\left(\frac{M_\omega}{m}\right)-\frac{1}{2}\right]$$

Siendo M_ω la masa del mesón ω^0 y m la masa de una de las partículas en las cuales decae. Evalúe aproximadamente la energía total radiada en cada decaimiento integrando el espectro hasta la frecuencia máxima permitida cinemáticamente. ¿Qué fracción de la energía en reposo del mesón representa en cada decaimiento?