TEORIA ELECTROMAGNETICA
2015 – POSTGRADO

20.
Tres cargas están localizadas en el eje z, una carga +2q en el origen (q>0) y dos cargas - q en z = ± a cos wt. Determine los momentos multipolares de menor orden, la distribución angular de radiación y la potencia total radiada. Asuma ka << 1.

21.
Un cuadrupolo radiante consiste en un cuadrado de lado a con cargas ±q en esquinas alternadas, que rota a velocidad angular w en un plano alrededor de su centro. Calcule, para grandes longitudes de onda, los momentos cuadrupolares, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada. Indique la frecuencia de la radiación.

22.
Dos mitades de una cáscara esférica de radio R y conductividad infinita se separan por un pequeño intersticio aislante. Un potencial alternado se aplica a ambos cascarones de forma que los potenciales son ±Vcos wt. En la aproximación de grandes longitudes de onda encuentre los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia total radiada.

23.
a. En clase se calculó la energía radiada por una esfera conductora sobre la que incide una onda plana. Compare la potencia radiada por E1 y M1 en este caso y compare con los argumentos que muestran que E1 >> M1 en general. Explique.

b. Escriba el potencial escalar (monopolo eléctrico) para una distribución de carga. Muestre que los campos que se derivan de este potencial escalar, para cargas localizadas, son estáticos y no hay entonces radiación con origen en estos campos.

24.
Dos dipolos eléctricos fijos de momento dipolar p están en el plano x-y a una distancia 2a, con ejes paralelos y perpendiculares al plano, pero con momenos opuestos. Los dipolos rotan con velocidad angular constante w alrededor del eje z localizado en el punto medio. El movimiento es no relativista wa<< c.

a. Encuentre los omentos multipolares no nulos de menor orden.

b. Muestre que el campo magnético en la zona de radiación es, a menos de un factor de fase,

$$\mathbf{H} = \frac{cpa}{2\pi} k^3[(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \cos\theta - \hat{\mathbf{z}} \sin\theta \, e^{i\phi}] \cos\theta \frac{e^{ikr}}{r}$$

c. Muestre que la disribución angular de la radiación es proporcional a ($\cos^2\theta+\cos^4\theta$) y que la potencia total media radiada es $P= 4/(15\pi\varepsilon_0)\, c\, k^6 p^2 a^2$.

25.
Una superficie aproximadamente esférica dada por $R(\theta) = R_0[1 + \beta P_2(\cos\theta)]$

tiene en su interior una densidad unifrome de carga total Q. El parámetro β es pequeño y varía armónicamente con frecuencia w. Esto describe ondas de superficie en la esfera.

a. En la aproximación de grandes longitudes de onda y a menor orden en β calcule los momentos multipolares no nulos, la distribución angular de radiación y la potencia total radiada

b. Si la densidad uniforme de carga es sustituida por una densidad uniforme de magnetización intrínseca paralela al eje z y con un momento magnético total M, repita los cálculos de la parte anterior.

26.

Un sistema radiante puede ser una distribución de cargas fijas puestas en rotación. En este caso no es de la forma $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\exp(-iwt)$.

a. Muestre que para cargas rotando se pueden calcular momentos multipolares *reales*, dependientes del tiempo, usando directamente la expresión de $\rho(\mathbf{r}, t)$. Los momentos multipolares para una frecuencia dada con la definición de ρ dada al principio del problema se pueden calcular con una descomposición de Fourier de los momentos dependientes del tiempo.

b. Considere una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ periódica en el tiempo con período $T = 2\pi/w_0$. Expanda en serie de Fourier muestre que puede ser escrita como:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}[2\rho_n(\mathbf{x})e^{-in\omega_0 t}]$$

donde

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(\mathbf{x}, t)e^{in\omega_0 t}\, dt$$

Estas fórmulas muestran en forma explícita como conectar cargas rotando con $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\exp(-iwt)$.

c. Considere una carga q rotando en un plano x-y en un círculo de radio R a velocidad angular constante w_0. Calcule los momentos multipolares $l=0$ y $l=1$ por los métodos de la parte a. y b. y compare. Usando la parte b. exprese la densidad de carga $\rho_0(\mathbf{r})$ en coordenadas cilíndricas. ¿Hay multipolos de orden superior, por ejemplo, cuadrupolos? Indique las frecuencias.

27.

La carga y corriente para la transición espontánea del estado 2p, m=0 del hidrógeno al estado base 1s son (despreciando el espín):

$$\rho(r, \theta, \phi, t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\, a_0^4} \cdot re^{-3r/2a_0}Y_{00}Y_{10}e^{-i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{J}(r, \theta, \phi, t) = \frac{-iv_0}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2} + \frac{a_0}{z}\hat{\mathbf{z}}\right)\rho(r, \theta, \phi, t)$$

El radio de Bohr, la diferencia de frecuencia entre los niveles y la velocidad en la órbita de Bohr son respectivamente:

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \qquad \omega_0 = 3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0$$

$$v_0 = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar = \alpha c \approx c/137$$

a. Muestre que la "magnetización" efectiva para la transición es

$$\text{“}\mathcal{M}\text{”}(r, \theta, \phi, t) = -i\frac{\alpha c a_0}{4}\tan\theta(\hat{\mathbf{x}}\sin\phi - \hat{\mathbf{y}}\cos\phi) \cdot \rho(r, \theta, \phi, t)$$

Calcule la divergencia de esta cantidad y evalúe los multipolos de radiación no nulos en el límite de grandes longitudes de onda.

b. En la aproximación dipolar eléctrica calcule la potencia media total radiada. Exprese su respuesta en unidades de $\hbar w_0 \alpha^4 c/a_0$ siendo $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ la constante de estructura fina.

c. Interprete este resultado clásico para la potencia como el producto de la energía del fotón $\hbar w_0$ veces la probabilidad de transición; evalúe numéricamente esta probabilidad en unidades de s^{-1}.

d. Si en vez de la densidad de carga semiclásica usada el electrón es descrito en el estado 2p por una órbita circular de radio 2 a_0 rotando con la frecuencia de transición w_0, calcule la potencia radiada. Exprese el resultado en las mismas unidades que la parte b) y evalúe el cociente numéricamente.