TEORIA ELECTROMAGNETICA 2
2011 – POSTGRADO

8.

a. Considere la identidad $\partial_\mu D - \partial_\nu D\, \delta^\nu{}_\mu = 0$. Considere la densidad lagrangeana para campos electromagnéticos sin fuentes $D = -1/4\, F^2$ y muestre que $\partial_\mu D = -\ \partial_\nu\, (F^{\nu\alpha}\, F_{\mu\alpha})$. Calcule $\partial_\nu D$ directamente y muestre entonces que $T^\nu{}_\mu = -F^{\nu\eta} F_{\mu\eta} + \frac{1}{4}\ F^2\, \delta^\nu{}_\mu$ es un tensor de 4-divergencia nula, simétrico y traza cero. Observe que para este tensor T^{00} es proporcional a la densidad de energía, $T^i{}_j$ es el tensor de Maxwell, y que T^{0i} es la densidad de momento del campo.

b. Deduzca de lo anterior la conservación de la energía y del momento para los campos.

9.

a. Deduzca para una partícula cargada en un campo externo, y a partir del lagrangeano escalar, la ecuación de movimiento $dU^\alpha/d\tau = q/mc\ \ F^{\alpha\beta}\, U_\beta$.

b. Considere el lagrangeano de Proca, que describe un campo electromagnético con fotones masivos en presencia de un fuentes externas:
$\mathscr{L}_P = \mathscr{L}_{em} + \mu^2/8\pi\, A^\alpha\, A_\alpha$, donde μ es la inversa numérica de la longitud de Compton para fotones $\mu = m_\gamma c\, /\, \hbar$. Escriba las ecuaciones de Maxwell en este caso y la ecuación de ondas (gauge de Lorenz). Para una carga q en reposo en el origen deduzca el potencial escalar en este caso estático e interprete el significado físico de μ.

10.

a. Considere para un electrón el 4-vector de espín en el laboratorio s^α y en el referencial del reposo s'^α. En este último referencial $s'^0 = 0$.Escriba **s** en función de **s'** y la relación inversa. Para la ecuación BMT con g=0 escriba entonces la ecuación de movimiento d**s**/dt. Muestre entonces que $d\mathbf{s}'/dt = \mathbf{w}_T \times \mathbf{s}'$ siendo $\mathbf{w}_T = -\,\gamma^2/(\gamma+1)\ \boldsymbol{\beta} \times d\boldsymbol{\beta}/dt$; para un movimiento circular de frecuencia **w** muestre que $\mathbf{w}_T = -\,(\,\gamma - 1\,)\ \mathbf{w}$.

b. Compruebe que en el límite NR este resultado se reduce al visto en clase. En el acelerador LEP2 del CERN los electrones tenían 90 GeV de energía. Escriba la ecuación anterior en este caso.

11. El acoplamiento espín-órbita describe la interacción de un electrón moviéndose en órbita alrededor de un núcleo, y permite entender de desdoblamiento e niveles con igual s y ℓ pero diferente momento angular total $\mathbf{j} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\ell}$: es la interacción entre el momento magnético del electrón y el campo magnético observado en el referencial de reposo del electrón en su movimiento alrededor del núcleo. Asuma que el campo eléctrico E producido por el núcleo y los demás electrones en el laboratorio es esférico. Muestre que a primer orden el campo magnético $\mathbf{B}' \approx E/mc^2 r\ \boldsymbol{\ell}$. nLa ecuación de movimiento del espín $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{m_s} \times \mathbf{B}'$ se puede escribir $d\mathbf{s}/dt \approx \mathbf{w_B} \times \mathbf{s}$ siendo $\mathbf{w_B} = -\ gqE/2m^2c^2 r\ \boldsymbol{\ell}$. Al mismo orden contribuye el término de Thomas para el cual en este caso $d\boldsymbol{\beta}/dt = qe/mcr\ \mathbf{r}$. Muestre finalmente que la frecuencia total de precisión es $\mathbf{w} = \mathbf{w_B} + \mathbf{w_T} = -\,(g-1)\ qE/2m^2c^2 r\,\boldsymbol{\ell}$ y la energía de interacción es $W = \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} = -\,(g-1)\ qE/2m^2c^2 r\ \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}$.

12.

a. Escriba la ecuación BMT para una partícula en un campo magnético **B** y calcule la variación temporal de la polarización longitudinal: $d(\mathbf{s}\cdot \boldsymbol{\beta}/\beta)\, /\, dt$ **.** Compruebe que

$d(\mathbf{s}\cdot \boldsymbol{\beta}/\beta)\, /\, dt = (g-2)\ q\gamma/2m\ \ (\,\mathbf{s} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}/\beta\,)$,

y que

$d(\mathbf{s}'\cdot \boldsymbol{\beta}/\beta)\, /\, dt = (g-2)\ q/2m\ \ (\,\mathbf{s}' \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}/\beta\,)$.

b. Para medir el valor de $(g-2)$ en muones se hacen circular los mismos en un campo magnético uniforme, utilizando campos eléctricos para focalizar los muones en el anillo del acelerador. El acelerador es operado el valor de γ que anula el efecto el campo eléctrico en la polarización. Muestre que cuando se incluye un campo eléctrico la ecuación anterior es

$d(\mathbf{s'}\cdot \boldsymbol{\beta}/\beta) / dt = - q/2m\, \mathbf{s'}_\perp \cdot [\, (g-2)\, \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}/\beta + (g\beta - 2/\beta)\, \mathbf{E}/c)$,

donde $\mathbf{s'}_\perp = \mathbf{s}_\perp = \mathbf{s} - (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\beta}/\beta)\, \boldsymbol{\beta}/\beta$. Calcule γ y la energía de los muones para anular el efecto el campo eléctrico.

13.

Un sistema radiante puede ser una distribución de cargas fijas puestas en rotación. En este caso no es cierto que $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\, e^{-iwt}$.

a. Para este tipo de problemas una alternativa puede ser calcular momentos multipolares reales y dependientes del tiempo usando $\rho(\mathbf{r}, t)$ directamente y entonces calcular los momentos multipolares para una dada frecuencia por medio de la descomposición de Fourier correspondiente.

b. Considere una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ periódica en el tiempo con período $T = 2\pi / w_0$, expanda $\rho(\mathbf{r}, t)$ en serie de Fourier y muestre que puede ser escrita como:

$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \Sigma_{n=1} \mathrm{Re}[\, 2\rho_n(\mathbf{r})\, e^{-i n w_0 t}\,]$

donde

$$\rho_n(\mathbf{r}) = 1/T \int_0^T \rho(\mathbf{r}, t)\, e^{i n w_0 t}\, dt$$

Estas fórmulas muestran en forma explícita como conectar cargas rotando con $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\, e^{-iwt}$.

c. Considere una carga q rotando en un plano x-y en un círculo de radio R a velocidad angular constante w_0. Calcule los momentos multipolares $\ell=0$ y $\ell=1$ por los métodos de la parte a. y b. y compare. Usando la parte b. exprese la densidad de carga $\rho_0(\mathbf{r})$ en coordenadas cilíndricas. ¿Hay multipolos de orden superior, por ejemplo, cuadrupolos? Indique las frecuencias.

d. Un cuadrupolo radiante consiste en en un cuadrado de lado a con cargas $\pm$q en esquinas alternadas, que rota a velocidad angular w en un plano alrededor de su centro. Calcule, para grandes longitudes de onda, los momentos cuadrupolares, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada. Indique la frecuencia de la radiación.

14.

La carga y corriente para la transición espontánea del estado 2p, m=0 del hidrógeno al estado base 1s son (despreciando el espín):

$$\rho(r, \theta, \phi, t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\, a_0^4} \cdot r e^{-3r/2a_0} Y_{00} Y_{10} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{J}(r, \theta, \phi, t) = \frac{-iv_0}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2} + \frac{a_0}{z}\hat{\mathbf{z}}\right)\rho(r, \theta, \phi, t)$$

El radio de Bohr, la diferencia de frecuencia entre los niveles y la velocidad en la órbita de Bohr son respectivamente:

$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529 \times 10^{-10}$ m $\quad \omega_0 = 3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0 \quad v_0 = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar = \alpha c \approx c/137$

a) Muestre que la "magnetización" efectiva para la transición es

$$\text{“}\boldsymbol{\mathcal{M}}\text{”}(r, \theta, \phi, t) = -i\,\frac{\alpha c a_0}{4} \tan\theta(\hat{\mathbf{x}} \sin\phi - \hat{\mathbf{y}} \cos\phi) \cdot \rho(r, \theta, \phi, t)$$

Calcule la divergencia de esta cantidad y evalúe los multipolos de radiación no nulos en el límite de grandes longitudes de onda.

b. En la aproximación dipolar eléctrica calcule la potencia media total radiada. Exprese su respuesta en unidades de $ħw_0\ a^4c/a_0$ siendo $a = e^2/4πe_0ħc$ la constante de estructura fina.

c. Interprete este resultado clásico para la potencia como el producto de la energía del fotón $ħw_0$ veces la probabilidad de transición; evalúe numéricamente esta probabilidad en unidades de s^{-1}.

d. Si en vez de la densidad de carga semiclásica usada el electrón es descrito en el estado 2p por una órbita circular de radio 2 a_0 rotando con la frecuencia de transición w_0, calcule la potencia radiada. Exprese en las mismas unidades que la parte b) y evalúe el cociente numéricamente.