TEORIA ELECTROMAGNETICA 1
2011 – POSTGRADO

1.
a. Verifique que $g^{\mu\upsilon}$ es un tensor de orden 2 y escriba la transformación de Lorentz inversa $(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}$ en función de $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$.
b. Demuestre que $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}$ es un pseudotensor. Calcule $\varepsilon^{\alpha\beta\eta\zeta}\,\varepsilon_{\eta\zeta\mu\delta}$.
c. Deduzca las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético para un "boost" en dirección arbitraria **β**.
d. Muestre que un boost puede escribirse como $\exp(-\xi\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}/\beta) = I - \mathrm{sh}\,\xi\ \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}/\beta + (\mathrm{ch}\,\xi - 1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}/\beta)^2$.
e. Demuestre que la fase de una onda plana es invariante ante transformaciones de Lorentz.
f. Use lo anterior para encontrar cómo se transforman $k_0 = \omega/c$ y $\boldsymbol{\kappa}$ para la onda plana en el referencial K en el referencial en movimiento K'. Deduzca entonces que (k_0, $\boldsymbol{\kappa}$) es un 4-vector.
g. Para ondas de luz , $k_0 = |\boldsymbol{\kappa}|$, calcule ω' y θ' en función de ω y θ (efecto Doppler relativista). Observe que hay un efecto Doppler transverso para $\theta=\pi/2$.

2.
a. Verifique que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante rotaciones, inversiones espaciales e inversiones temporales.
b. Verifique que el vector de Poynting, la densidad de energía y el tensor de Maxwell también son invariantes.

3.
Considere los tensores de campo F y $\mathscr{F}$. Calcule las cantidades F^2 (escalar), $F\cdot\mathscr{F}$ (pseudoescalar) y $\mathscr{F}\cdot\mathscr{F}$ (escalar).

4.
a. Obtenga la fuerza de Lorentz a partir del lagrangeano para una partícula en un campo externo. Idem a partir del hamiltoniano.
b. Verifique que una transformación de gauge suma al lagrangeano una derivada total temporal que no cambia el valor de la acción ni de las ecuaciones de movimiento.

5.
Una partícula relativista se mueve a velocidad βc en el eje x y emite N fotones con la distribución dN/dΩ'= f(θ',Φ') en el referencial de reposo de la partícula donde los ángulos polar y azimutal están medidos respecto de la dirección de movimiento en el referencial mencionado. Relacione los ángulos polares en el referencial de la partícula y de laboratorio (reposo) y entonces escriba la distribución de fotones en el laboratorio dN/dΩ(θ',Φ').

6.
Una densidad lagrangeana alternativa para el campo electromagnético es

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{8\pi}\,\partial_\alpha A_\beta\,\partial^\alpha A^\beta - 1/c\, J_\alpha A^\alpha$$

a. Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange e indique bajo qué condiciones reproducen las ecuaciones de Maxwell.
b. Muestre explícitamente, y bajo qué suposiciones, este lagrangeano difiere de la densidad lagrangeano usual por una 4-divergencia. Indique si esta 4-divergencia afecta a las ecuaciones de movimiento.

7.
En un sistema de referencia un campo eléctrico estático y uniforme E_0 es paralelo al eje x y una inducción magnética $B_0 = 2E_0$ de iguales propiedades está en el plano x-y y forma un ángulo θ con el eje x. Determine la velocidad de un sistema de referencia en el cual los campos son paralelos. Escriba los campos en este referencial para $\theta \ll 1$ y $\theta \rightarrow \pi/2$.