TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
2009–POSTGRADO

27. En un sistema de referencia un campo eléctrico estático y uniforme E_0 es paralelo al eje x y una inducción magnética $B_0 = 2E_0$ de iguales propiedades está en el plano x=y y forma un ángulo θ con el eje x. Determine la velocidad de un sistema de referencia en el cual los campos son paralelos. Escriba los campos en los casos $\theta \ll 1$ y $\theta \longrightarrow \pi/2$.

28. Pruebe que las componentes espaciales Θ^{0i} y la temporal Θ^{00} del tensor simétrico de esfuerzos $\Theta^{\alpha\beta} = 1/4\pi \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + 1/4 \; g^{\alpha\beta} F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda}\right)$ para campos electromagnéticos libres y sin fuentes, confinados en una región finita del espacio, se transforman como las componentes de un cuadrivector. Deduzca entonces que la potencia es un escalar.

29. La carga y corriente para la transición espontánea del estado 2p, m=0 del hidrógeno al estado base 1s son (despreciando el espín):

$$\rho(r,\theta,\phi,t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\,a_0^4}\cdot re^{-3r/2a_0}Y_{00}Y_{10}e^{-i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{J}(r,\theta,\phi,t) = \frac{-iv_0}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2} + \frac{a_0}{z}\,\hat{\mathbf{z}}\right)\rho(r,\theta,\phi,t)$$

El radio de Bohr, la diferencia de frecuencia entre los niveles y la velocidad en la órbita de Bohr son respectivamente:

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529\times 10^{-10}\ \text{m} \qquad \omega_0 = 3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0 \qquad v_0 = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar = \alpha c \approx c/137$$

a) Muestre que la "magnetización" efectiva para la transición es

$$\text{“}\mathcal{M}\text{”}(r,\theta,\phi,t) = -i\,\frac{\alpha c a_0}{4}\tan\theta(\hat{\mathbf{x}}\sin\phi - \hat{\mathbf{y}}\cos\phi)\cdot\rho(r,\theta,\phi,t)$$

Calcule la divergencia de esta cantidad y evalúe los multipolos de radiación no nulos en el límite de grandes longitudes de onda.

b) En la aproximación dipolar eléctrica calcule la potencia media total radiada. Exprese su respuesta en unidades de $\hbar w_0\, \alpha^4 c/a_0$ siendo $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ la constante de estructura fina.

c) Interprete este resultado clásico para la potencia como el producto de la energía del fotón $\hbar w_0$ veces la probabilidad de transición; evalúe numéricamente esta probabilidad en unidades de s^{-1}.

d) Si en vez de la densidad de carga semiclásica usada el electrón es descrito en el estado 2p por una órbita circular de radio 2 a_0 rotando con la frecuencia de transición w_0, calcule la potencia radiada. Exprese el resultado en las mismas unidades que la parte b) y evalúe el cociente numéricamente.

30.
Usando los resultados de Lienard-Wiechert discuta la potencia media radiada por unidad de ángulo sólido en el movimiento no relativista de una partícula de carga e en las siguientes situaciones:

a. moviéndose en el eje z con la ley horaria z(t) = a cos wt,
b. en un círculo de radio R con frecuencia angular w_0.

Dibuje la distribución angular de la radiación y determine la potencia total radiada en cada caso.

31.
Partículas cargadas de cargas e_j y coordenadas $\mathbf{r}_j(t)$ son aceleradas en el intervalo de tiempo $-\tau/2 < t < \tau/2$ durante el cual sus velocidades cambian de $c\boldsymbol{\beta}_j$ a $c\boldsymbol{\beta}'_j$.

a. Muestre que para frecuencias $w\,\tau \ll 1$ la intensidad de la radiación emitida con polarización ϵ por unidad de ángulo sólido y unidad de frecuencia es

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c}\left|\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{E}\right|^2 \text{ dónde } \quad \vec{E} = \sum_j e_j \left(\frac{\vec{\beta}'_j}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}'_j} - \frac{\vec{\beta}_j}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}_j} \right) e^{-i\omega\vec{n}\cdot\vec{r}(0)/c}$$

b. Un mesón w^0 de masa 784 MeV decae en pares $\pi^+ \pi^-$ y $e^+ e^-$ con fracciones de decaimiento $1.3x10^{-2}$ y $8x10^{-5}$ respectivamente. Muestre que para ambos canales de decaimiento el espectro de frecuencia radiada a bajas energías es

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi c}\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta} \right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 2 \right] \simeq \frac{4e^2}{\pi c}\left[\ln\left(\frac{M_\omega}{m} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

Siendo M_ω la masa del mesón ω^0 y m la masa de una de las partículas en las cuales decae. Evalúe aproximadamente la energía total radiada en cada decaimiento integrando el espectro hasta la frecuencia máxima permitida cinemáticamente. ¿Qué fracción de la energía en reposo del mesón representa en cada decaimiento?

31.
El principio de correspondencia de Bohr establece que en el límite de números cuánticos grandes la potencia radiada clásica es igual al producto del cuanto de energía ($\hbar\omega$) con el inverso de la vida media de la transición del número cuántico principal n a (n-1).

a. En la aproximación no relativista muestre que para átomos hidrogenoides la probabilidad de transición (inverso de la vida media) para una transición de n a (n-1) es

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{n^5}$$

b. Para el átomo de hidrógeno compare este valor semiclásico con el obtenido en mecánica cuántica para las vidas medias de las transiciones 2p⟶1s ($1.6x10^{-9}$ s), 4f⟶3d ($7.3x10^{-8}$s), 6h⟶35g ($6.1x10^{-7}$s)

32.
Una partícula no relativista de carga ze, masa m y energía cinética E tiene una colisión frontal con un centro de fuerzas fijo de rango finito, con el cual la energía potencial repulsiva es V(r) (esta energía es mayor que E a pequeñas distancias).

a. Muestre que la energía total radiada es

$$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{min}) - V(r)}}$$

b. Si la interacción es Coulombiana V(r) = zZe^2 / r muestre que la energía total radiada es

$$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{zmv_0^{\ 5}}{Zc^3}$$

siendo v_0 a velocidad en el infinito.

30.
Plexiglas o Lucite tienen un índice de refracción 1.50 en la región visible; compute el ángulo de emisión de radiación Cherenkov para electrones y protones en función de la energía cinética en MeV. Determine la cantidad de fotones con longitudes de onda entre 4000 y 6000 A emitidos por centímetro en Lucite por un electrón de 1 MeV, un protón de 500 MeV y proton, de 5 GeV.