TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
2009- POSTGRADO

21.
Una antena consiste en un círculo plano de alambre de radio a. La corriente en el alambre es
$I = I_0 \cos wt = \mathrm{Re}\,[I_0\, e^{-iwt}]$
a) Calcule los campos E, H en la zona de radiación sin aproximaciones en ka. Determine la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.
b) ¿Cuál es el momento multipolar más bajo no nulo (Q_{lm} o M_{lm})? Calcule en el límite ka « 1.

22.
Un sistema radiante puede ser una distribución de cargas fijas puestas en rotación. En este caso no es cierto que $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i w t)$.
a)Muestre que para cargas rotando se puede calcular momentos multipolares *reales*, dependientes del tiempo, usando directamente la expresión de $\rho(\mathbf{r}, t)$. Los momentos multipolares para una frecuencia dada con la definición de ρ dada al principio del problema se pueden calcular con una descomposición de Fourier de los momentos dependientes del tiempo.
b) Considere una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ periódica en el tiempo con período $T = 2\pi/w_0$. Expanda en serie de Fourier muestre que puede ser escrita como:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[2\rho_n(\vec{r})e^{-inw_0t}\right] \text{ donde } \rho_0(\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(\vec{r},t)e^{-inw_0t}dt.$$

Estas fórmulas muestran en forma explícita como conectar cargas rotando con $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i w t)$.
c)Considere una carga q rotando en un plano x-y en un círculo de radio R a velocidad angular constante w_0. Calcule los momentos multipolares l=0 y l=1 por los métodos de la parte a) y b) y compare. Usando la parte b) exprese la densidad de carga $\rho_0(\mathbf{r})$ en coordenadas cilíndricas. ¿Hay multipolos de orden superior, por ejemplo, cuadrupolos? Indique las frecuencias.

23.
Un cuadrupolo radiante consiste en en un cuadrado de lado a con cargas ±q en esquinas alternadas, que rota a velocidad angular w en un plano alrededor de su centro. Calcule, para grandes longitudes de onda, los momentos cuadrupolares, los campos de radiación, la distribución angular de la radiación y la potencia total radiada. Indique la frecuencia de la radiación.

24.
Dos mitades de una cáscara esférica de radio R y conductividad infinita se separan por un pequeño intersticio aislante. Un potencial alternado se aplica a ambos cascarones de forma que los potenciales son ±Vcos wt. En la aproximación de grandes longitudes de onda encuentre los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia total radiada.

25.
La carga y corriente para la transición espontánea del estado 2p, m=0 del hidrógeno al estado base 1s son (despreciando el espín):

$$\rho(r,\theta,\phi,t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\,a_0^4}\cdot r e^{-3r/2a_0} Y_{00} Y_{10} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{J}(r,\theta,\phi,t) = \frac{-iv_0}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2} + \frac{a_0}{z}\,\hat{\mathbf{z}}\right)\rho(r,\theta,\phi,t)$$

El radio de Bohr, la diferencia de frecuencia entre los niveles y la velocidad en la órbita de Bohr son respectivamente:

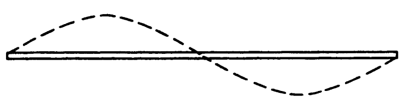
$$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529\times 10^{-10}\ \mathrm{m} \qquad \omega_0 = 3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0 \qquad v_0 = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar = \alpha c \approx c/137$$

a) Muestre que la “magnetización” efectiva para la transición es

$$“\mathcal{M}”(r,\ \theta,\ \phi,\ t)\ =\ -i\,\frac{\alpha c a_0}{4}\tan\theta(\hat{\mathbf{x}}\sin\phi-\hat{\mathbf{y}}\cos\phi)\cdot\rho(r,\ \theta,\ \phi,\ t)$$

Calcule la divergencia de esta cantidad y evalúe los multipolos de radiación no nulos en el límite de grandes longitudes de onda.
b) En la aproximación dipolar eléctrica calcule la potencia media total radiada. Exprese su respuesta en unidades de $\hbar w_0\,\alpha^4 c/a_0$ siendo $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ la constante de estructura fina.
c) Interprete este resultado clásico para la potencia como el producto de la energía del fotón $\hbar w_0$ veces la probabilidad de transición; evalúe numéricamente esta probabilidad en unidades de s^{-1}.
d) Si en vez de la densidad de carga semiclásica usada el electrón es descrito en el estado 2p por una órbita circular de radio 2 a_0 rotando con la frecuencia de transición w_0, calcule la potencia radiada. Exprese en las mismas unidades que la parte b) y evalúe el cociente numéricamente.

26.
Una antena delgada de longitud d es excitada de forma que una corriente sinusoidal de un período la abarca en cada instante, como muestra la figura



a) Calcule exactamente la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y grafique la distribución angular.
b) Determine la potencia total radiada y encuentre un valor numérico para la resistencia de radiación.
c) Trate ahora el problema usando la expansión multipolar:
c1) Calcule los momentos multipolares eléctrico, magnético y cuadrupolar exactamente y en la aproximación de grandes longitudes de onda.
c2) Compare la forma de la distribución angular de potencia radiada de los primeros multipolos no nulos con el resultado exacto.
c3) Determine la potencia total radiada y la resistencia de radiación para los multipolos de menor orden usando los multipolos de c1). Compare con b) e indique si hay alguna contradicción.