TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
2009 - POSTGRADO

9.

a) Muestre que para una polarización inicial arbitraria, la sección eficaz de difusión de una esfera conductora perfecta de radio a, sumada en las polarizaciones finales, está dada en el límite de grandes longitudes de onda por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4a^6\left[\frac{5}{4} - |\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{n}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\epsilon}_0)|^2 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}\right]$$

donde $\mathbf{n_0}$ y $\mathbf{n}$ son las direcciones de las radiaciones incidentes y difundidas respectivamente y $\boldsymbol{\epsilon}_0$ es el vector polarización de la radiación incidente. ($\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 1$; $\mathbf{n_0} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0$).

b) Si la radiación incidente es linealmente polarizada, muestre que la sección eficaz es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1 + \cos^2\theta) - \cos\theta - \frac{3}{8}\sin^2\theta\cos 2\phi\right]$$

donde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 = \cos\theta$ y el ángulo azimutal ϕ está medido desde la dirección de la polarización lineal.

c) ¿Cuál es el cociente de las intensidades difundidas en $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ y el $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/2$? Explique físicamente en términos de los multipolos inducidos y sus distribuciones de radiación.

10.

Una esfera sólida y uniforme de radio R y conductividad σ difunde un haz de ondas planas no polarizadas de frecuencia w, con wR/c << 1. La conductividad es suficientemente grande como para que la longitud de penetración sea pequeña comparada con R.

a) Justifique el uso del potencial escalar magnetostático para determinar el campo alrededor de la esfera, asumiendo que la conductividad es infinita (recuerde que w ≠ 0).

b) Use las condiciones de contorno vistas en clase para determinar la sección eficaz de absorción de la esfera. Muestre que esta varía como $w^{1/2}$ si σ es independiente de la frecuencia.

11.

Una onda no polarizada de frecuencia w = c k es difundida por una esfera dispersora dieléctrica isotrópica y uniforme de radio R mucho menor que la longitud de onda. La esfera es caracterizada por una constante dieléctrica ϵ_r real y una conductividad σ real. Los parámetros son tales que la longitud de penetración es mucho mayor que el radio R.

a) Calcule la sección eficaz diferencial y total.

b) Muestre que la sección eficaz de absorción es

$$\sigma_{\text{abs}} = 12\pi R^2 \frac{(RZ_0\sigma)}{(\epsilon_r + 2)^2 + (Z_0\sigma/k)^2}$$

c) Escriba la amplitud de difusión en la dirección hacia adelante y use el teorema óptico para evaluar la sección eficaz total. Compare su respuesta con la suma de las secciones eficaces de difusión y absorción de las partes a) y b). Comente.

El teorema óptico establece que si el campo eléctrico difundido es

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$$

entonces la sección eficaz total está dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{E_0} \qquad \sigma_t = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{k} = \mathbf{k}_0)]$$

12.

La difusión por una esfera dieléctrica (problema anterior) fue tratada como la difusión puramente debida a un dipolo eléctrico. Esta aproximación es correcta a menos que la constante dieléctrica real ϵ/ϵ_0 sea muy grande. En este caso la contribución dipolar magnética, aun siendo de orden superior en kR puede ser importante.

a) Muestre que el flujo magnético variable en el tiempo de la onda incidente induce una corriente azimutal e la esfera que produce un dipolo magnético,

$$\mathbf{m} = \frac{i4\pi\sigma Z_0}{k\mu_0}(kR)^2\frac{R^3}{30}\mathbf{B}_{\text{inc}}$$

b) Muestre que la aplicación del teorema óptico a la suma coherente de las contribuciones dipolares eléctrica y magnética da lugar a la sección eficaz total (compare con Landau y Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media, p. 323).

$$\sigma_t = 12\pi R^2(RZ_0\sigma)\left[\frac{1}{(\epsilon_r + 2)^2 + (Z_0\sigma/k)^2} + \frac{1}{90}(kR)^2\right]$$

13.

Considere la difusión por una onda plana de radiación electromagnética por una esfera dieléctrica no permeable (μ=μ_0) de radio a y constante dieléctrica ϵ_r.

a) Encuentre los campos dentro de la esfera y usando las condiciones de contorno para la onda incidente más la difundida fuera de la esfera y determine sin ninguna restricción en ka los coeficientes multipolares de la onda difundida. Defina corrimientos de fase apropiados para el problema.

b) Considere el límite de grandes longitudes de onda (ka « 1) y determine explícitamente las secciones eficaces diferencial y total. Compare sus resultados con los obtenidos en clase para una esfera dieléctrica.

c) En el límite $\epsilon_r \longrightarrow \infty$ compare sus resultados con los de una esfera conductora prefecta.

14.

Considere la difusión de una onda plana por una esfera no permeable de radio a conductividad muy buena, pero no perfecta, de radio a, usando el desarrollo multipolar esférico. Asuma que ka « 1 y que la longitud de penetración es menor que a.

(a) Muestre que

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{k\delta}{2}(1 - i)$$

b) En el límite de grandes longitudes de onda muestre que para l=1 los coeficientes $\alpha_\pm(1)$ y $\beta_\pm(1)$ son

$$\alpha_\pm(1) \simeq -\frac{2i}{3}(ka)^3\left[\frac{\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) - i\frac{\delta}{a}}{\left(1 + \frac{\delta}{2a}\right) + i\frac{\delta}{2a}}\right]$$

$$\beta_\pm(1) \simeq \frac{4i}{3}(ka)^3$$

c) Escriba la expresión de la sección eficaz diferencial corregida a primer orden en δ/a y a menor órden en ka.

d) Use la expresión dada en clase para calcular la sección eficaz de absorción en función de $\alpha(l)$ y $\beta(l)$. Muestre que a primer órden en δ es $\sigma_{\text{abs}} = 3\pi k\delta a^2$. ¿Qué diferencia hay en este resultado si δ = a?

15.

Una pantalla plana conductora perfecta ocupa el semiplano x-y (i.e., x < 0). Una onda plana de intensidad I_0 y número de onda k incide desde el eje z < 0. Calcule los valores de los campos

difractados en el plano paralelo al plano x-y definido por z = Z > 0. Las coordenadas del punto de observación son (X, 0, Z).
a) Muestre que para la aproximación de Kirchhoff escalar y en el límite Z >> X y $(kZ)^{1/2}$ >>1, el campo difractado es

$$\psi(X, 0, Z, t) \simeq I_0^{1/2} e^{ikZ-i\omega t}\left(\frac{1+i}{2i}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\xi}^{\infty} e^{it^2}\,dt$$

donde $\xi = (k/2Z)^{1/2}X$.
b) Muestre que la intensidad puede ser escrita cómo

$$I = |\psi|^2 = \frac{I_0}{2}\left[(C(\xi) + \tfrac{1}{2})^2 + (S(\xi) + \tfrac{1}{2})^2\right]$$

donde C(ξ) y S(ξ) son las llamadas integrales de Fresnel.. Determine el comportamiento asintótico de la intensidad para ξ grande y positivo (región iluminada) y para ξ grande y negativo (región en sombra). ¿Cuál es el valor de la intensidad para X = 0? Haga un dibujo de esta en función de X para Z fijo.

(c) Use la formula vectorial (Smythe-Kirchhoff))

$$\mathbf{E}_{\text{diff}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\nabla \times \int_{\text{apertures}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E})\,\frac{e^{ikR}}{R}\,da'$$

Para obtener un resultado similar a la parte a). Compare las dos expresiones.

16.
Una onda plana linealmente polarizada de amplitud Eo y número de onda κ incide en una abertura circular de radio a de una pantalla plana conductora perfecta. El vector de onda incidente forma un ángulo α con la normal a la pantalla y el vector polarización es perpendicular al plano de incidencia.
a) Calcule el campo difractado y la potencia por ángulo sólido trasmitida por la abertura usando la fórmula de Smythe-Kirchhoff, asumiendo que el campo eléctrico tangencial en la abertura es el campo incidente no perturbado.
(b) Compare los resultados con la aproximación escalar de Kirchhoff y con los resultados vistos en clase para la polarización en el plano de incidencia.