TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
POSTGRADO – RADIACIÓN

(entrega de los problemas con * hasta el fin del curso)

22. La carga y corriente para la transición espontánea del estado 2p, m=0 del hidrógeno al estado base 1s son (despreciando el espín):

$$\rho(r, \theta, \phi, t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\, a_0^4} \cdot r e^{-3r/2a_0} Y_{00} Y_{10} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{J}(r, \theta, \phi, t) = \frac{-iv_0}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{2} + \frac{a_0}{z}\hat{\mathbf{z}}\right)\rho(r, \theta, \phi, t)$$

El radio de Bohr, la diferencia de frecuencia entre los niveles y la velocidad en la órbita de Bohr son respectivamente:

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \qquad \omega_0 = 3e^2/32\pi\epsilon_0\hbar a_0 \qquad v_0 = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar = \alpha c \approx c/137$$

a) Muestre que la "magnetización" efectiva para la transición es

$$\text{“}\mathcal{M}\text{”}(r, \theta, \phi, t) = -i\,\frac{\alpha c a_0}{4} \tan\theta(\hat{\mathbf{x}}\sin\phi - \hat{\mathbf{y}}\cos\phi) \cdot \rho(r, \theta, \phi, t)$$

Calcule la divergencia de esta cantidad y evalúe los multipolos de radiación no nulos en el límite de grandes longitudes de onda.

b) En la aproximación dipolar eléctrica calcule la potencia media total radiada. Exprese su respuesta en unidades de $\hbar w_0\, \alpha^4 c/a_0$ siendo $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ la constante de estructura fina.

c) Interprete este resultado clásico para la potencia como el producto de la energía del fotón $\hbar w_0$ veces la probabilidad de transición; evalúe numéricamente esta probabilidad en unidades de s^{-1}.

d) Si en vez de la densidad de carga semiclásica usada el electrón es descrito en el estado 2p por una órbita circular de radio 2 a_0 rotando con la frecuencia de transición w_0, calcule la potencia radiada. Expresela en las mismas unidades que la parte b) y evalúe el cociente numéricamente.

23. *

Una antena consiste en un círculo plano de alambre de radio a. La corriente en el alambre es
$I = I_0 \cos wt = \mathrm{Re}\,[I_0\, e^{-iwt}]$

a) Calcule los campos E, H en la zona de radiación sin aproximaciones en ka. Determine la potencia radiada por unidad de ángulo sólido.

b) ¿Cuál es el momento multipolar más bajo no nulo (Q_{lm} o M_{lm})? Evalúe en el límite ka « 1.

24.

Si la partícula liviana (electrón) de la difusión de Coulomb vista en clase es tratada clásicamente, el ángulo de difusión θ es función del parámetro de impacto b de acuerdo a la fórmula:

$$b = \frac{ze^2}{pv}\cot\frac{\theta}{2}$$

Siendo p = γ mv y la sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|.$$

a) Exprese el momento transferido invariante en términos del parámetro de impacto y muestre que la trasferencia de energía T(b) es

$$T(b) = \frac{2z^2e^4}{mv^2} \cdot \frac{1}{b^2 + b_{\min}^{(c)2}}$$

donde

$$b_{\min}^{(c)} = ze^2/pv \qquad T(0) = T_{\max} = 2\gamma^2\beta^2 mc^2.$$

b) Calcule el pequeño impulso transverso Δp dado a una partícula liviana (cuasi estacionaria) por el campo eléctrico transverso $E_\perp = \gamma qb / (b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{-3/2}$ de la partícula pesada q=ze cuando pasa con gran parámetro de impacto b en una línea recta a velocidad v. Encuentre la transferencia de energía $T \cong (\Delta p)^2/2m$ en función de b. Compare con el resultado exacto de a) y comente.

25.
a) Considere $\hbar \langle\omega\rangle = 12$ Z eV en la formula de cuántica de pérdida de energía; calcule la pérdida de energía (en MeV/cm) en aire a PTN, aluminio, cobre y plomo para protón y muon con energías cinéticas 10,100, 1000 MeV.
b) Convierta estos resultados a unidades de MeV • (cm^2/g) y compare los valores obtenidos para distintos materiales. Explique porqué todas las pérdidas de energía en MeV-(cm^2/g) son similares a menos de un factor dos, mientras que los valores en MeV/cm son muy diferentes.

26.
Plexiglas o Lucite tienen un índice de refracción 1.50 en la región visible; compute el ángulo de emisión de radiación Cherenkov para electrones y protones en función de la energía cinética en MeV. Determine la cantidad de fotones con longitudes de onda entre 4000 y 6000 A emitidos por centímetro en Lucite por un electrón de 1 MeV, un protón de 500 MeV y proton, de 5 GeV.

27.
Una partícula de carga **ze** se mueve en el eje **z** con velocidad constante **v** y pasa por z = 0 en t = 0. El medio por el cual se desplaza es descrito por una constante dieléctrica $\epsilon(\omega)$.
Utilice el potencial escalar $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ calculado en clase para calcular $\Phi(\omega,\mathbf{x})$:

$$\Phi(\omega, \mathbf{x}) = \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, K_0\left(\frac{|\omega|\,\rho}{v}\sqrt{1-\beta^2\epsilon}\right) e^{i\omega z/v}$$

donde z and $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ son las coordenadas cilíndricas del punto de observación.
b) Asuma ϵ independiente de la frecuencia y que $\beta^2\epsilon < 1$ y calcule $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Calcule los campos eléctrico y magnético y compare con los campos producidos por una partícula de igual velocidad en el vacío. Muestre que, entre otras diferencias, el factor γ en el vacío está remplazado por $\Gamma = (1 - \beta^2\epsilon)^{-1/2}$.
c) Repita los cálculos anteriores si $\beta^2\epsilon > 1$; muestre que

$$\Phi(\omega, \mathbf{x}) = \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\omega z/v}\left[-N_0\left(\frac{|\omega|\,\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon-1}\right) \pm iJ_0\left(\frac{|\omega|\,\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon-1}\right)\right]$$

Calcule la úlima transformada de Fourier y obtenga $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Relacione su respuesta con el potencial calculado en Jackson, sección 13.4.

28.
a) Encuentre el número N_γ de fotones por radiación de transición con frecuencias más grandes que ω_P emitidos por interfase. Muestre que si $\gamma >> 1$

$$N_\gamma = \frac{z^2 e^2}{\pi\hbar c}\left[(\ln\gamma - 1)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right]$$

b) Use este resultado y el valor $\hbar\omega_P = 20$ eV encuentre la energía media de los fotones (en keV) para $\gamma = 10^3, 10^4, 10^5$.

29. *
Considere la pérdida de energía por colisiones cercanas de una particular pesada rápida, no relativista, de carga z que pasa por un plasma electrónico. Asuma que el apantallamiento de la

interacción de Coulomb está dado por $V(r) = z e^2 \exp(-k_D r) / r$, donde k_D es el parámetro de apantallamiento de Debye, que actúa entre los electrones y la partícula incidente.

a) Muestre que la transferencia de energía en una colisión con parámetro de impacto b está dada aproximadamente por

$$\Delta E(b) \simeq \frac{2(ze^2)^2}{mv^2} k_{\mathrm{D}}^2 K_1^2(k_{\mathrm{D}} b)$$

donde m es la masa del electrón y v es la velocidad de la partícula incidente.

b) Determine la pérdida de energía por unidad de distancia para colisiones con parámetro de impacto mayor que b_{min}. Asuma $k_D b_{min} << 1$ y muestre que

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_{\mathrm{D}} b<1} \simeq \frac{(ze)^2}{v^2} \omega_p^2 \ln\left(\frac{1}{1.47 k_{\mathrm{D}} b_{\min}}\right)$$

donde b_{min} está dado por el mayor de los parámetros de impacto clásico y cuántico discutido en clase.