TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
POSTGRADO – DIFRACCIÓN
(entrega de los problemas con * hasta el 9 de noviembre)

17.
Una pantalla plana conductora perfecta ocupa el semiplano x-y (i.e., x < 0). Una onda plana de intensidad I_0 y número de onda k incide desde el eje z < 0. Calcule los valores de los campos difractados en el plano paralelo al plano x-y definido por z = Z > 0. Las coordenadas del punto de observación son (X, 0, Z).
a) Muestre que para la aproximación de Kirchhoff escalar y en el límite Z >> X y $(kZ)^{1/2}$ >>1, el campo difractado es

$$\psi(X, 0, Z, t) \simeq I_0^{1/2} e^{ikZ-i\omega t}\left(\frac{1+i}{2i}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\xi}^{\infty} e^{it^2}\,dt$$

donde $\xi = (k/2Z)^{1/2} X$.
b) Muestre que la intensidad puede ser escrita cómo

$$I = |\psi|^2 = \frac{I_0}{2}\left[(C(\xi) + \tfrac{1}{2})^2 + (S(\xi) + \tfrac{1}{2})^2\right]$$

donde C(ξ) y S(ξ) son las llamadas integrales de Fresnel.. Determine el comportamiento asintótico de la intensidad para ξ grande y positivo (región iluminada) y para ξ grande y negativo (región en sombra). ¿Cuál es el valor de la intensidad para X = 0? Haga un dibujo de esta en función de X para Z fijo.

(c) Use la formula vectorial (Smythe-Kirchhoff))

$$\mathbf{E}_{\text{diff}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\nabla \times \int_{\text{apertures}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E})\,\frac{e^{ikR}}{R}\,da'$$

Para obtener un resultado similar a la parte a). Compare las dos expresiones.

18.
Una onda plana linealmente polarizada de amplitud Eo y número de onda κ incide en una abertura circular de radio a de una pantalla plana conductora perfecta. El vector de onda incidente forma un ángulo α con la normal a la pantalla y el vector polarización es perpendicular al plano de incidencia.
a) Calcule el campo difractado y la potencia por ángulo sólido trasmitida por la abertura usando la fórmula de Smythe-Kirchhoff, asumiendo que el campo eléctrico tangencial en la abertura es el campo incidente no perturbado.
(b) Compare los resultados con la aproximación escalar de Kirchhoff y con los resultados vistos en clase para la polarización en el plano de incidencia.

19.*
Considere una pantalla plana conductora perfecta, con una abertura rectangular de lados a y b > a definida por x = ±(a/2), y = ±(b/2). Una onda plana incide normalmente con su vector de polarización formando un ángulo β con el lado más largo de la abertura.
a) Calcule los campos difractados y la potencia por unidad de ángulo sólido utilizando la expresión vectorial de Kirchhoff

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{ie^{ikr}}{2\pi r}\mathbf{k} \times \int_{S_1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\,da'$$

asumiendo que el campo eléctrico tangencial en la abertura es el incidente.
b) Calcule lo mismo usando la aproximación escalar de Kirchhoff.
c) Para b = a, β = 45°, ka = 4π, compute las aproximaciones vectoriales y escalares para la potencia difractada en función del ángulo θ para ф = 0. Haga un gráfico mostrando la comparación entre los dos resultados.

20.
Aberturas en una pantalla plana conductora perfecta pueden ser entendidas como el lugar de fuentes efectivas que producen la radiación (los campos difractados). Si la dimensión de la abertura es pequeña comparada con la longitud de onda, sus efectos son los de fuentes de radiación dipolares eléctrica y magnética, siendo despreciables multipolos de orden superior.

a) Use la expresión de Smythe-Kirchhoff para mostrar que los momentos dipolares efectivos, eléctricos y magnéticos, pueden ser escritos en términos de integrales del campo eléctrico tangencial en la abertura de la siguiente forma:

$$\mathbf{p} = \epsilon \mathbf{n} \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_{\tan})\, da$$

$$\mathbf{m} = \frac{2}{i\omega\mu} \int (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\tan})\, da$$

Donde $\mathbf{E}_{\tan}$ es exactamente el campo eléctrico tangencial en la abertura y **n** es la normal a la pantalla dirigida hacia la región de interés, mientras que la integral es en la abertura.

b) Muestre que la expresión para el campo magnético puede ser escrito como:

$$\mathbf{m} = \frac{2}{\mu} \int \mathbf{x}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\, da$$

Sea cuidadoso respecto a posibles contribuciones del borde de la apertura donde algunas componentes de los campos son singulares en el límite de pantalla infinitamente delgada.

21.*
Discuta la difracción debida a una abertura pequeña y circular de radio a en una pantalla plana conductora perfecta (ka << 1).

a) Si los campos cerca de la pantalla en el lado incidente son normales $\mathbf{E}_0 e^{-iwt}$ y tangencial $\mathbf{B}_0 e^{-iwt}$ muestre que el campo eléctrico difractado en la zona de Fraunhofer es

$$\mathbf{E} = \frac{e^{ikr-i\omega t}}{3\pi r} k^2 a^3 \left[2c\, \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{k}}{k} \times \left(\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right]$$

donde k es el vector de onda en la dirección de observación.

b) Determine la distribución angular de radiación difractada y muestre que la potencia total trasmitida por el agujero

$$P = \frac{2}{27\pi Z_0} k^4 a^6 (4c^2 B_0^2 + E_0^2)$$