

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
POSTGRADO – DISPERSIÓN

(entrega de los problemas con * hasta el 15 de octubre)

11.

a) Muestre que para una polarización inicial arbitraria, la sección eficaz de difusión de una esfera conductora perfecta de radio a , sumada en las polarizaciones finales, está dada en el límite de grandes longitudes de onda por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4 a^6 \left[\frac{5}{4} - |\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{n}|^2 - \frac{1}{4} |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\epsilon}_0)|^2 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} \right]$$

donde \mathbf{n}_0 y \mathbf{n} son las direcciones de las radiaciones incidentes y difundidas respectivamente y $\boldsymbol{\epsilon}_0$ es el vector polarización de la radiación incidente. ($\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 1$; $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0$).

b) Si la radiación incidente es linealmente polarizada, muestre que la sección eficaz es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\boldsymbol{\epsilon}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}) = k^4 a^6 \left[\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta - \frac{3}{8} \sin^2 \theta \cos 2\phi \right]$$

donde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 = \cos \theta$ y el ángulo azimutal ϕ está medido desde la dirección de la polarización lineal.

c) ¿Cuál es el cociente de las intensidades difundidas en $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$ y el $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi/2$? Explique físicamente en términos de los multipolos inducidos y sus distribuciones de radiación.

12.

Una esfera sólida y uniforme de radio R y conductividad σ difunde un haz de ondas planas no polarizadas de frecuencia w , con $wR/c \ll 1$. La conductividad es suficientemente grande como para que la longitud de penetración sea pequeña comparada con R .

a) Justifique el uso del potencial escalar magnetostático para determinar el campo alrededor de la esfera, asumiendo que la conductividad es infinita (recuerde que $w \neq 0$).

b) Use las condiciones de contorno vistas en clase para determinar la sección eficaz de absorción de la esfera. Muestre que esta varía como $w^{1/2}$ si σ es independiente de la frecuencia.

13.

Una onda no polarizada de frecuencia $w = ck$ es difundida por una esfera dispersora dieléctrica isotrópica y uniforme de radio R mucho menor que la longitud de onda. La esfera es caracterizada por una constante dieléctrica ϵ_r real y una conductividad σ real. Los parámetros son tales que la longitud de penetración es mucho mayor que el radio R .

a) Calcule la sección eficaz diferencial y total.

b) Muestre que la sección eficaz de absorción es

$$\sigma_{\text{abs}} = 12\pi R^2 \frac{(RZ_0\sigma)}{(\epsilon_r + 2)^2 + (Z_0\sigma/k)^2}$$

c) Escriba la amplitud de difusión en la dirección hacia adelante y use el teorema óptico para evaluar la sección eficaz total. Compare su respuesta con la suma de las secciones eficaces de difusión y absorción de las partes a) y b). Comente.

El teorema óptico establece que si el campo eléctrico difundido es

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$$

entonces la sección eficaz total está dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{E_0} \quad \sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{k} = \mathbf{k}_0)]$$

14. *

La difusión por una esfera dieléctrica (problema anterior) fue tratada como la difusión puramente debida a un dipolo eléctrico. Esta aproximación es correcta a menos que la constante dieléctrica real ϵ/ϵ_0 sea muy grande. En este caso la contribución dipolar magnética, aun siendo de orden superior en kR puede ser importante.

a) Muestre que el flujo magnético variable en el tiempo de la onda incidente induce una corriente azimutal en la esfera que produce un dipolo magnético,

$$\mathbf{m} = \frac{i4\pi\sigma Z_0}{k\mu_0} (kR)^2 \frac{R^3}{30} \mathbf{B}_{\text{inc}}$$

b) Muestre que la aplicación del teorema óptico a la suma coherente de las contribuciones dipolares eléctrica y magnética da lugar a la sección eficaz total (compare con Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, p. 323).

$$\sigma_t = 12\pi R^2 (RZ_0\sigma) \left[\frac{1}{(\epsilon_r + 2)^2 + (Z_0\sigma/k)^2} + \frac{1}{90} (kR)^2 \right]$$

15.

Considere la difusión por una onda plana de radiación electromagnética por una esfera dieléctrica no permeable ($\mu=\mu_0$) de radio a y constante dieléctrica ϵ_r .

a) Encuentre los campos dentro de la esfera y usando las condiciones de contorno para la onda incidente más la difundida fuera de la esfera y determine sin ninguna restricción en ka los coeficientes multipolares de la onda difundida. Defina corrimientos de fase apropiados para el problema.

b) Considere el límite de grandes longitudes de onda ($ka \ll 1$) y determine explícitamente las secciones eficaces diferencial y total. Compare sus resultados con los obtenidos en clase para una esfera dieléctrica.

c) En el límite $\epsilon_r \rightarrow \infty$ compare sus resultados con los de una esfera conductora perfecta.

16.*

Considere la difusión de una onda plana por una esfera no permeable de radio a conductividad muy buena, pero no perfecta, de radio a , usando el desarrollo multipolar esférico. Asuma que $ka \ll 1$ y que la longitud de penetración es menor que a .

(a) Muestre que

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{k\delta}{2} (1 - i)$$

b) En el límite de grandes longitudes de onda muestre que para $l=1$ los coeficientes $\alpha_{\pm}(1)$ y $\beta_{\pm}(1)$ son

$$\alpha_{\pm}(1) \approx -\frac{2i}{3} (ka)^3 \frac{\left[\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) - i \frac{\delta}{a} \right]}{\left[\left(1 + \frac{\delta}{2a}\right) + i \frac{\delta}{2a} \right]}$$

$$\beta_{\pm}(1) \approx \frac{4i}{3} (ka)^3$$

c) Escriba la expresión de la sección eficaz diferencial corregida a primer orden en δ/a y a menor orden en ka .

d) Use la expresión dada en clase para calcular la sección eficaz de absorción en función de $\alpha(l)$ y $\beta(l)$. Muestre que a primer orden en δ es $\sigma_{\text{abs}} = 3\pi k\delta a^2$. ¿Qué diferencia hay en este resultado si $\delta = a$?