TEORIA ELECTROMAGNETICA 2
2015 – POSTGRADO

6.
Una densidad lagrangeana alternativa para el campo electromagnético es

$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}\, \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - 1/c\, J_\alpha A^\alpha$

a. Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange e indique bajo qué condiciones reproducen las ecuaciones de Maxwell.

b. Muestre explícitamente, y bajo qué suposiciones, este lagrangeano difiere de la densidad lagrangeano usual por una 4-divergencia. Indique si esta 4-divergencia afecta a las ecuaciones de movimiento.

7.
a. Considere la identidad $\partial_\mu D - \partial_\nu D\, \delta^\nu_\mu = 0$. La densidad lagrangeana para campos electromagnéticos sin fuentes es $D = -1/4\, F^2$; muestre que $\partial_\mu D = -\partial_\nu (F^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha})$. Calcule $\partial_\nu D$ directamente y muestre entonces que $T^\nu{}_\mu = -F^{\nu\eta} F_{\mu\eta} + \frac{1}{4} F^2 \delta^\nu_\mu$ es un tensor de 4-divergencia nula, simétrico y traza cero. Observe que para este tensor T^{00} es proporcional a la densidad de energía, $T^i{}_j$ es el tensor de Maxwell, y que T^{0i} es la densidad de momento del campo.

b. Deduzca de lo anterior la conservación de la energía y del momento para los campos.

8.
a. Deduzca para una partícula cargada en un campo externo y a partir del lagrangeano, la ecuación de movimiento $dU^\alpha/d\tau = q/mc\ F^{\alpha\beta} U_\beta$ y la fuerza de Lorentz.

b. Muestre que el lagrangeano de una partícula en interacción con un campo puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -mc\,(U_\alpha U^\alpha)^{1/2} - q/c\, U_\alpha A^\alpha$$

Obtenga nuevamente a partir de las ecs. de Lagrange la ecuación de la parte a. y la fuerza de Lorentz.

c. Muestre que una transformación de gauge transforma el lagrangeano en una derivada total y deja entonces invariante a las ecuaciones.

d. Considere el lagrangeano de Proca, que describe un campo electromagnético con fotones masivos en presencia de un fuentes externas: $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_{em} + \mu^2/8\pi\ A^\alpha A_\alpha$, donde μ es la inversa numérica de la longitud de Compton para fotones $\mu = m_\gamma c / \hbar$. Escriba las ecuaciones de Maxwell en este caso y la ecuación de ondas (gauge de Lorenz). Para una carga q en reposo en el origen deduzca el potencial escalar en este caso estático e interprete el significado físico de μ.

9.
Un cilindro circular muy largo tiene carga uniforme y una densidad de carga lineal k. Por el cilindro fluye una corriente J uniforme. Encuentre el sistema de referencia en el cual existe únicamente campo eléctrico o magnético. Encuentre el valor de esos campos.

10.
Una partícula relativista de masa m y carga e se propaga en un campo magnético constante B. En t=0 la partícula tiene radio vector r_0 e impulso $\mathbf{p}_0$. Calcule el momento y la energía de la partícula y las coordenadas de la misma como función del tiempo propio y del tiempo t.