TEORÍA ELECTROMAGÉTICA
POSTGRADO – 2015
PARCIAL 1 – 2 octubre

1.

a.
Muestre que las cuatro cantidades $B^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ son un 4-vector contravariante si $A_\mu B^\mu$ es un escalar para todo 4-vector A.

Sea $L^\mu{}_\upsilon = \partial x'^\mu / \partial x^\upsilon$ y $L^{-1\,\mu}{}_\upsilon = \partial x^\mu / \partial x'^\upsilon$.

$A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu = (\partial x^\upsilon / \partial x'^\mu \; A_\upsilon) \; B'^\mu = A_\upsilon (\partial x^\upsilon / \partial x'^\mu) \; B'^\mu = A_\mu (\partial x^\mu / \partial x'^\upsilon \; B'^\upsilon)$ y si esta igualdad es cierta para todo A_μ entonces

$$B^\mu = \partial x^\mu / \partial x'^\upsilon B'^\upsilon$$

o en forma equivalente $B'^\mu = \partial x'^\mu / \partial x^\upsilon \; B^\upsilon$ que muestra que B se transforma como un 4-vector.

b.
Demuestre que el tensor $\partial_\mu F^{\mu\upsilon}$ se transforma como un 4-vector contravariante, si $F^{\mu\upsilon}$ es un tensor con dos índices contravariantes.

$\partial'_\mu F'^{\mu\upsilon} = (\partial x^\varepsilon / \partial x'^\mu \; \partial_\varepsilon) (\partial x'^\mu / \partial x^\alpha \; \partial x'^\upsilon / \partial x^\beta \; F^{\alpha\beta}) = (\partial x^\varepsilon / \partial x'^\mu \; \partial x'^\mu / \partial x^\alpha) \; (\partial x'^\upsilon / \partial x^\beta \; \partial_\varepsilon F^{\alpha\beta}) = \delta^\varepsilon{}_\alpha \; (\partial x'^\upsilon / \partial x^\beta \; \partial_\varepsilon F^{\alpha\beta}) = \partial x'^\upsilon / \partial x^\beta \; \partial_\varepsilon F^{\varepsilon\beta}$ que muestra que se transforma como un 4-vector.

2.

Considere una carga q en reposo en el origen.

a.
Calcule los potenciales escalar (electrostático) Φ y vector (magnético) **A** para un observador que se traslada en la dirección x positiva con velocidad v. Exprese los potenciales en las coordenadas del observador.

$\Phi = q/r$ y $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ para una carga en reposo, siendo $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,

$y' = y$,
$z' = z$ y
$x' = L^1{}_0 \; ct + L^1{}_1 \; x = - \beta\gamma \; ct + \gamma x = \gamma (x - \beta c t)$, siendo $\beta = v/c$ con lo cual
$x' = \gamma (x - \Sigma t)$ y entonces la transf. Inversa es
$x = \gamma (x' + v t')$; finalmente

$r = (\gamma^2 (x' + v\, t+)^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$

(Φ, **A**) es un 4-vector, entonces se transforma en

$$\Phi'(x') = L^0{}_0\, \Phi(x) = \gamma\, \Phi(x) = \gamma\, \Phi(L^{-1}x') = \gamma\, N/ (\gamma^2 (x' + v\, t+)^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$A'^1(x') = L^1{}_0\, \Phi(x) = = - \beta\gamma\, \Phi(L^{-1}x') = - \beta\gamma\, N/ (\gamma^2 (x' + \Sigma\, t+)^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

b.
Escriba la expresión de los potenciales en el límite no relativista. Interprete el resultado.

$\beta \to 0 \quad \Phi \quad \gamma \to 1$ entonces

$\Phi'(x') = q/ ((x' + v\, t')^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$

$A'^1(x') = 0$

que indica que a primer orden el CM es nulo y la situación se describe como en electrostática pero con la carga alejándose a velocidad v en el eje x'.

Transformación de Lorentz:

$x'^\mu = L^\mu{}_\upsilon\, x^\upsilon$; dirección x positiva, $\beta = v/c$
$L^0{}_0 = L^1{}_1 = \gamma$;
$L^1{}_0 = L^0{}_1 = - \beta\gamma$

Campo $\varphi^\mu(x)$ 4-vectorial: $\varphi'^\mu(x') = L^\mu{}_\upsilon\, \varphi^\upsilon(x)$